

doi:10.6053/j.issn.1001-1412.2018.02.020

几种梯度场计算的数值算法及其地学应用

杨莉¹, 张宝一^{1,2}

(1. 中南大学地球科学与信息物理学院, 长沙 410083;

2. 中国地质大学地质过程与矿产资源国家重点实验室, 武汉 430074)

摘要: 梯度作为标量场在空间上最重要的微观变化特征,能较好地反映其在空间上的变化趋势。本文介绍了中心差分算子、相邻梯度因子和 Sobel 梯度算子三种梯度数值算法。以点电荷在三维空间中产生的电势场构造了一标量场,通过理论公式求解了其梯度值,并将理论梯度值与三种数值算法的结果进行了对比与统计分析,验证了三种梯度数值算法的有效性和适用性。结果表明,排除场源的影响后,Sobel 梯度算子相较其它两种数值算法更逼近于理论梯度值。最后,利用 Sobel 梯度算子求取了某铜矿区可控源音频大地电磁法(CSAMT)三维视电阻率场的梯度场,用梯度场刻画了视电阻率在空间上的变化趋势,提高了对三维地下空间的电性分布规律和地质情况的认识。

关键词: 标量场;矢量场;梯度;视电阻率;数值算法

中图分类号: P631.32 **文献标识码:** A

0 引言

场是物质存在和相互作用的一种基本形式,是由场源物质引起的物质的时空分布,即场的分布变化规律是与场源物质的物理、几何特征紧密联系的。在科学研究中,作为研究对象的物理量经常以场的形式存在;自然界存在两种场,设场函数 $f(x, y, z)$,当 f 的值是一个数量时称为标量场,如温度场、电势场、密度场等;当 f 的值是一个向量时称为矢量场,如梯度场、电场、磁场等。

由于场数据便于开展空间模拟、空间叠加等分析,可引入“场”的方法开展三维地质空间建模与分析。利用三维空间中连续变化的场来表达地质体的性质、属性等参数,并对这些场衍生出的宏观和微观特征进行分析,来提高对三维地质空间物性分布规

律和地下地质情况的认识。近年来,已有一些学者结合“场”的思想挖掘深层次信息来分析地质问题,唐泽圣等^[1]利用梯度因子改进了体绘制算法,重构了三维空间数据场;成秋明^[2]通过地球物理场和地球化学场的分解来研究有关的地质体和地质过程;M. W. Jones 等^[3]对三维距离场的生成技术进行了详细的分析和总结;张宝一等^[4]以辽宁红透山铜矿为例,建立了成矿信息场、地层形态场、断裂影响场、地球物理场等多源地学空间数据场;Yuan Yuan 等^[5]以及 Zuo Boxin 等^[6]利用势场或重力场的梯度张量进行了边缘检测。

然而,现有的三维地质空间建模的相关理论和方法体系中大多关注标量场,忽视了地学分析中空间方位的重要性,而矢量场的引入可使得三维地质空间的表达和特征分析更完备、更准确。三维地质空间数据场的微观特征分析,包括标量场的梯度分析,矢量场的散度、旋度分析等,可以更深入地认识

收稿日期: 2017-01-25; **改回日期:** 2018-03-12; **责任编辑:** 王传泰

基金项目: 国家自然科学基金(编号:41772348,41302259)资助。

作者简介: 杨莉(1991—),女,软件工程师,2017年毕业于中南大学,获硕士学位,主要研究方向为地理信息系统应用工程。E-mail: 1039352174@qq.com

通信作者: 张宝一(1979—),男,副教授,博士后,2007年毕业于中国地质大学(武汉),获博士学位,主要研究方向为地理信息系统应用工程。通信地址:湖南省长沙市岳麓区麓山南路932号,中南大学校本部地信院;邮政编码:410083;E-mail: zhangbaoyi@csu.edu.cn

三维地质空间场及其空间分布规律。梯度是三维空间场最重要的微观变化特征,刻画了标量场的空间分布特征,能较好的反映标量场在空间上的变化趋势。

1 梯度数值计算方法

空间某点的标量场沿不同方向的变化率是不同的,因此,变化方向可以作为研究标量场的独有特征^[7]。而标量场中的梯度是指向该点标量场增长最快的方向,反映了标量场的变化趋势。标量场的梯度概念可以定义为:假设 $f(x, y, z)$ 表示标量场中某点 (x, y, z) 处的场值,用 $\nabla f(x, y, z)$ 表示梯度,这是一个矢量:

$$\nabla f(x, y, z) = [\nabla f / \nabla x, \nabla f / \nabla y, \nabla f / \nabla z] \quad (1)$$

(1)式的模长大小可以表示为:

$$\|\nabla f(x, y, z)\| = [(\nabla f / \nabla x)^2 + (\nabla f / \nabla y)^2 + (\nabla f / \nabla z)^2]^{1/2} \quad (2)$$

由(2)式可知,梯度是对场值在空间中的变化速率及方向的度量。当标量场用空间坐标的连续函数表示时,则空间中某点的梯度为该点处方向导数的最大值。当标量场是以离散的体元数值点的形式存在时,则只能通过数值方法估算出空间中该点的梯度值,且常用的梯度数值算法主要有中心差分估算法、相邻梯度因子算法^[8]和 Sobel 梯度算子^[9]等。

(1)中心差分估算法

中心差分算法利用周围 6 个相邻体元值进行梯度估算,可等效看作卷积核是 $D_{x,y,z} = [1, 0, -1]$ 的卷积运算。中心差分算子在三维空间中的表达式为:

$$\begin{cases} \frac{\nabla f}{\nabla x} = \frac{f(x_{i+1}, y_j, z_k) - f(x_{i-1}, y_j, z_k)}{2 \nabla x} \\ \frac{\nabla f}{\nabla y} = \frac{f(x_i, y_{j+1}, z_k) - f(x_i, y_{j-1}, z_k)}{2 \nabla y} \\ \frac{\nabla f}{\nabla z} = \frac{f(x_i, y_j, z_{k+1}) - f(x_i, y_j, z_{k-1})}{2 \nabla z} \end{cases} \quad (3)$$

由(3)式可知,体元的梯度值取决于该体元周围的 6 个相邻体元。但是,在体元值交替变化时,中心差分法是会产生梯度计算错误。设 A、B、C 为数据场中 X 方向三个连续体元,若 A、C 的体元值为 a, B 的体元值为 b,采用中心差分算子计算则 B 处的梯度为 0,这样对数据场的梯度矢量描述存在一定的不准确^[10]。

(2)相邻梯度因子法

相邻梯度因子算法则使用了其本身和周围 3 个相邻体元值进行梯度估算,以相邻差分因子 $D_{x,y} = [1, -1]$ 作为算法模板,在三维空间中的表达式为:

$$\begin{cases} \frac{\nabla f}{\nabla x} = \frac{f(x_{i+1}, y_j, z_k) - f(x_i, y_j, z_k)}{\nabla x} \\ \frac{\nabla f}{\nabla y} = \frac{f(x_i, y_{j+1}, z_k) - f(x_i, y_j, z_k)}{\nabla y} \\ \frac{\nabla f}{\nabla z} = \frac{f(x_i, y_j, z_{k+1}) - f(x_i, y_j, z_k)}{\nabla z} \end{cases} \quad (4)$$

(2)Sobel 梯度算子

还有一种常用的梯度算子—Sobel 算子,被广泛地应用于图像边缘检测^[11-12]。其计算方法不仅仅是简单的求差分,而是加权平均再求差分。对于三维标量数据场, Sobel 算子是使用周围 26 个邻域体元的属性值,并通过点 (x, y, z) 到周围各体元值的距离的平方反比来进行加权平均,计算该点处的梯度值。三维 Sobel 梯度算子在 x, y, z 轴方向上的模板定义为:

$$\begin{aligned} \text{Sobel}_x &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \\ &\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ \text{Sobel}_y &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \\ &\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ \text{Sobel}_z &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ &\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (5)$$

每个模板中的 3 项都对应 $[z-1, z, z+1]$ 三层体元的权值,通过模板可以分别计算出 x 、 y 、 z 轴方向各自的分量。

2 算法验证与比较

2.1 点电荷的电势场及其梯度

为检验几种梯度数值算法的效率和精度,本文以点电荷(电量为 $q \times 10^{-4} \text{ C}$)在空间中产生的电势值构造标量场,对于每一个场点 (x, y, z) ,都可以计算出该点的电势值:

$$u(q) = q / 4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r \quad (6)$$

式(6)中的 r 表示场的源点 (x', y', z') 到场点 (x, y, z) 的距离。电势梯度即电势升高最快的方向,大小是在这个方向上单位距离升高的电势,在直角坐标系中定义为:

$$u'(x, y, z) = (du/dx, du/dy, du/dz) \quad (7)$$

2.2 结果统计对比

本文按照 $1\,000 \times 1\,000 \times 1\,000$ 个体元建立了实验电势场,点电荷位于点 $(500, 500, 500)$ 处,在空间中产生的电势场如图 1 所示。

公式求解的电势场理论梯度值及由中心差分算子、相邻梯度因子和 Sobel 梯度算子三种数值方法估算的电势场梯度如图 2 所示。

由于梯度近似算法的影响,利用数值算法计算得出的电势场梯度值存在一定误差。因此,以理论梯度值作为标准,本文采用平均偏差(MBE)与平方根误差(RMSE)方法对几种梯度数值算法的结果进行了评价,公式分别如下:

$$\text{MBE} = \frac{\sum_{i=1}^n (E_i - M_i)}{n} \quad (8)$$

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (E_i - M_i)^2}{n}} \quad (9)$$

式(8)中的 E_i 与 M_i 分别表示理论计算值和估算值。

MBE 评价标准是,结果值如果越接近 0,表示与理论值差异越小;而 RSME 评标标准则是,其值越小,

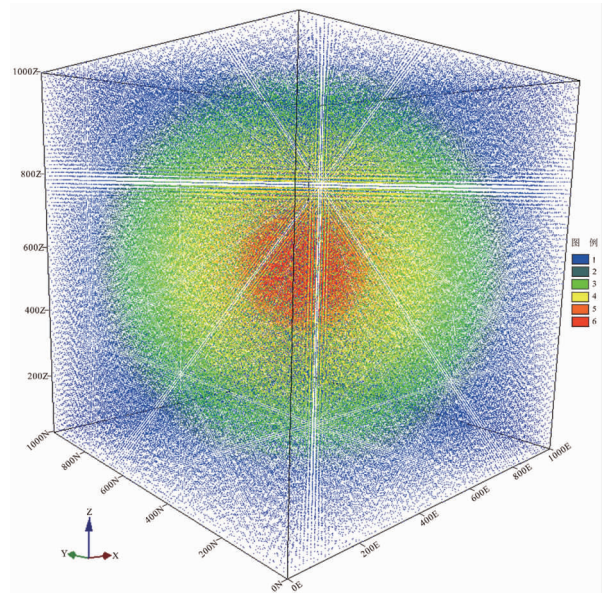


图 1 电势场(点按 33%抽稀疏)

Fig. 1 Electric potential

1. $0 \sim 1500$; 2. $1500 \sim 1700$; 3. $1700 \sim 2000$;
4. $2000 \sim 2500$; 5. $2500 \sim 5000$; 6. > 5000

表明两种方法的关系越密切,差异越小^[13]。剔除了点电荷所在体元及周围 26 邻接体元的场源影响后,三种数值算法的效率和精度的比较如表 1 所述。

从表 1 可以看出,同一标量场采用不同方法求得的梯度值是存在一定差异的。从时间效率来看,中心差分算子、相邻梯度因子和 Sobel 梯度算子都是差分原理,中心差分算子使用 6 个相邻体元值、相邻梯度因子算法使用自身体元值及 3 个相邻体元值、Sobel 算子采用 26 个邻接体元参加计算,虽然选取的相邻体元数量不同,但是时间耗费差异并不大。从计算精度上来看,在剔除场源以及周围 26 邻域体元后,平均偏差(MBE)和平方根误差(RMSE)结果均表明 Sobel 算子的估算结果更逼近于理论值,精度明显高于另外两种算法。

3 梯度在电阻率数据分析中的应用

视电阻率可以反映地质体的导电性变化参数,而不同类型的地质体在成分、结构以及构造上的差异会使得地质体呈现不同的视电阻率属性值,因此,对岩、矿石视电阻率的空间分布规律的研究,可以提升对地下地质构造的认识。下面将“场”的思想引入到三维地质空间建模中,采用 Sobel 梯度算子对三维视电阻率场的梯度进行了求解。

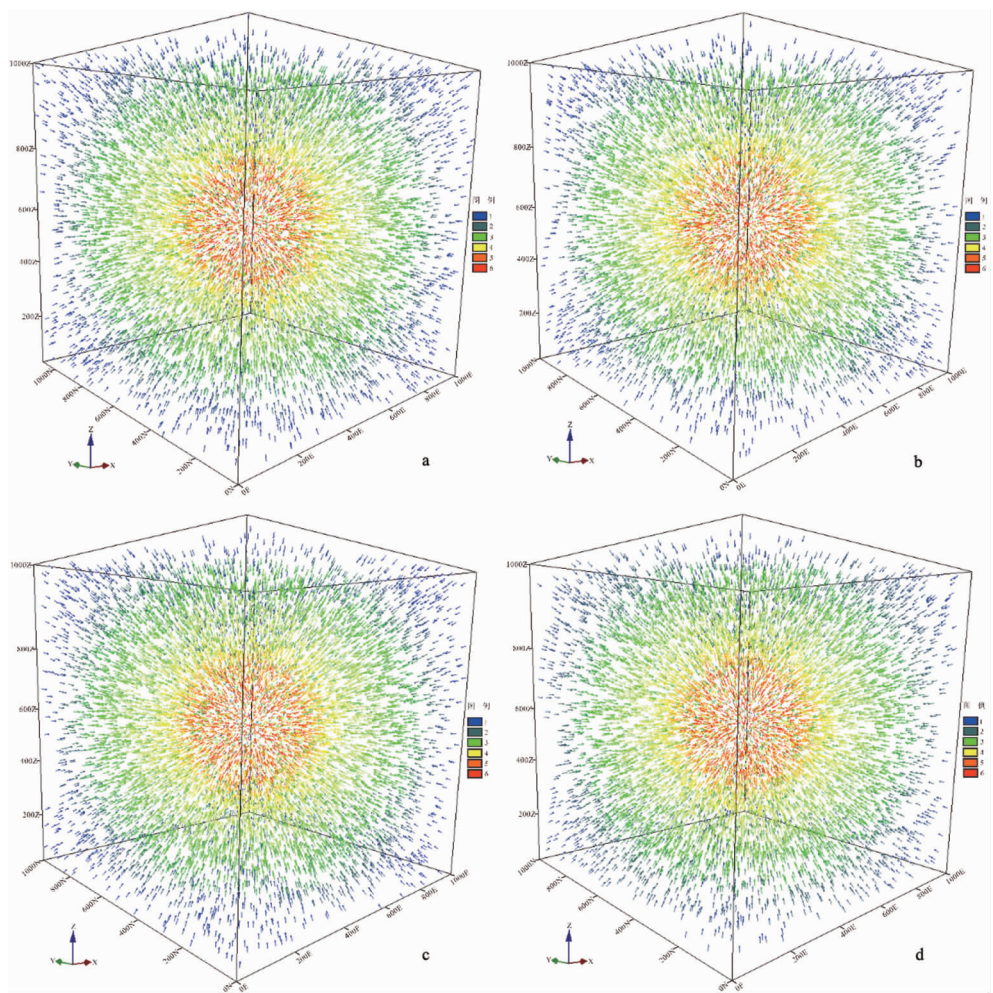


图 2 理论梯度值及三种数值算法梯度值

Fig. 2 Theoretical gradient field and experimental gradient fields estimated by three numerical algorithms

a. 电势场理论梯度;b. 中心差分法梯度;c. 相邻梯度因子梯度;d. Sobel 梯度算子梯度
1. 0~25; 2. 25~35; 3. 35~50; 4. 50~100; 5. 100~200; 6. >200

表 1 剔除场源及其周围 26 邻域的梯度值统计结果对比

Table 1 Comparison of statistical results of gradient fields without source and its 26-neighboring voxels

比较\方法	中心差分法	相邻梯度因子	Sobel 梯度算子
运行时间/s	4485.3318	4468.2166	4513.7892
MBE	-0.0500	-0.1310	0.0320
RMSE	20.2253	57.1658	11.1761

3.1 视电阻率场及其梯度

各地层岩性之间的视电阻率是存在差异的,根据这种差异,近年来已在深部矿产勘探中实现了找矿的众多突破。而梯度正能够较好地反映视电阻率的变化趋势,刻画视电阻率场的空间变化特征。以某铜矿区可控源音频大地电磁法(CSAMT)测得的视电阻率数据为例,采用 Sobel 梯度算子计算了该视电阻率场的梯度值,其视电阻率场及其梯度值图

如图 3 所示。

3.2 梯度反映电阻率场变化特征

空间的电阻率变化特征可为地层划分及深部钻探寻找资源提供相关的依据和参考。通过视电阻率梯度场探索空间中视电阻率的变化情况,可为地质推断解释工作提供保障,提升对地学空间的认知,在金属矿产勘查中具有十分重要的意义。相同地质体的电阻率值存在一定的范围,梯度的大小和方向的

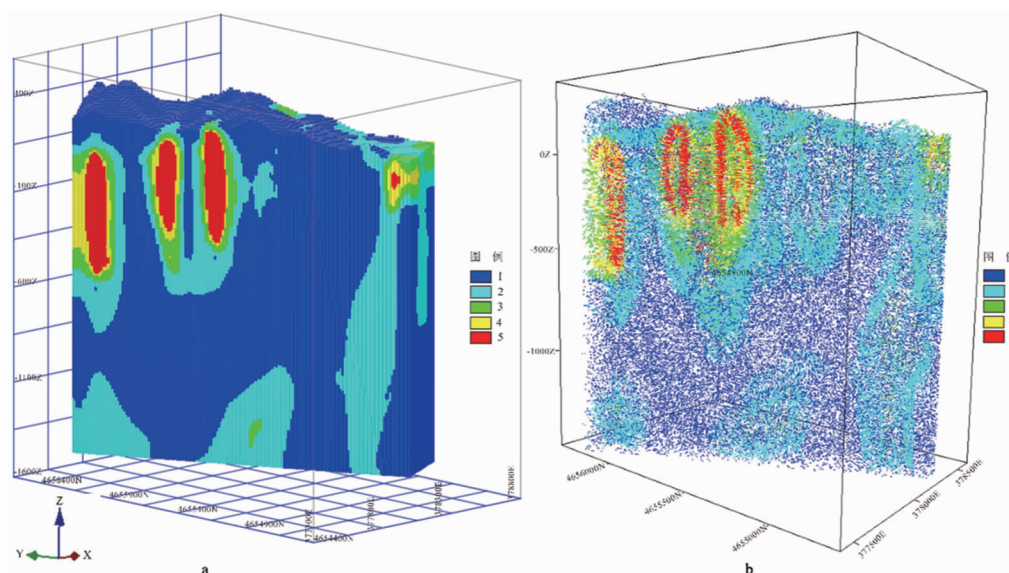


图3 某铜矿区视电阻率场及其梯度值图

Fig. 3 The field of resistivity and its gradient

- a. 视电阻率场(单位: $\Omega \cdot m$): 1. $0 \times 10^3 \sim 5 \times 10^3$; 2. $5 \times 10^3 \sim 5 \times 10^4$;
3. $1 \times 10^4 \sim 3 \times 10^4$; 4. $3 \times 10^4 \sim 5 \times 10^4$; 5. $5 \times 10^4 \sim 5 \times 10^5$
b. 视电阻率场梯度值图: 1. $0 \sim 50$; 2. $50 \sim 100$; 3. $100 \sim 500$;
4. $500 \sim 1000$; 5. $1000 \sim 4000$

变化速率刻画了电阻率场的变化趋势,一定程度上可以反映地质体的边界^[14]。不同类型的地质体的边界常常表现为梯度场中的梯级带,即梯度值大小发生突变且方向趋势一致的地方。结合视电阻率场及其对应的梯度场,可以得出梯级带的大致分布位置,为视电阻率场空间分布特征及变化趋势分析提供有效的手段。结合已有的地质、地球物理和其它相关资料进行综合分析,可以得到更加合理的地下地质情况的解释。

4 结语

本文将“场”的思想引入三维地质空间建模,研究了梯度矢量场在视电阻率场的变化特征分析中应用,取得了如下研究成果:

(1)采用中心差分算子、相邻梯度因子、Sobel梯度算子三种数值算法对点电荷的电势场的梯度进行估算,并对其结果进行了统计对比。结果表明,排除场源的影响后,Sobel梯度算子相较其它两种数值算法更逼近于理论梯度值。

(2)对三维视电阻率数据场在空间中最重要微观变化特征—梯度矢量进行了分析,通过梯度刻

画了视电阻率的变化特征,为三维地下空间中电性分布规律和地质情况的认识提供了参考。

致谢:红透山矿业有限公司石长岩副总经理、辽宁有色地质局 101 队地勘院杨铁军副院长在资料收集、坑道调查工作中给予了细致周密的安排和热情协助,国家地理信息系统工程技术研究中心与中南大学共建“MAPGIS 实验室”为本研究工作提供了 MAPGIS 软件,在此一并表示感谢!

参考文献:

- [1] 唐泽圣, 袁骏. 用图象空间为序的体绘制技术显示三维数据场[J]. 计算机学报, 1994, 17(11): 801.
- [2] 成秋明. 空间自相似性与地球物理和地球化学场的分解方法[J]. 地球物理学进展, 2001, 16(2): 8.
- [3] Jones M W, Baerentzen J A, Sramek M. 3D distance fields: A survey of techniques and applications [J]. Ieee Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2006, 12(4): 581-599.
- [4] 张宝一, 吴湘滨, 王丽芳, 等. 红透山铜矿外围隐伏矿体三维定量预测[J]. 中国有色金属学报, 2012, 22(3): 863-871.
- [5] Yuan Y, Yu Q L. Edge Detection in Potential-Field Gradient Tensor Data by Use of Improved Horizontal Analytical Signal Methods [J]. Pure and Applied Geophysics, 2015, 172(2): 461-472.
- [6] Zuo B, Hu X. Edge detection of gravity field using eigenvalue analysis of gravity gradient tensor [J]. Journal of Applied Ge-

- ophysics, 2015, 114: 263 – 270.
- [7] 梁昌洪. 矢量场论札记[M]. 北京: 科学出版社, 2007.
- [8] Duba R O, Hart P E. Pattern Classification and Scene analysis [M]. New York: John Wiley and Sons, 1973.
- [9] Derbin R A, Carpenter L, Hanrahan P. Volume rendering [J]. Computer Graphics, 1988, 22(4): 65 – 74.
- [10] 刘杰, 李政, 康克军, 等. 高效光线投射体绘制算法研究[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2002(7): 629 – 631.
- [11] Qu Y D, Cui C S, Chen S B. A fast subpixel edge detection method using Sobel-Zernike moments operator[J]. Image and Vision Computing, 2005, 23(1): 11 – 17.
- [12] Qiu H T, Ping X L, He J W. A New Fractional Differential and Sobel Operator Based Edge Detection Method [A], Proceedings of the 3rd International Conference on Materials Engineering, Manufacturing Technology and Control, 2016: 1882 – 1885.
- [13] 贾志军, 姬兴杰. 三江平原稻田蒸散量模拟研究[J]. 中国农业气象, 2014, 35(4): 380 – 388.
- [14] 刘俊涛, 刘文予, 吴彩华, 等. 一种提取物体线形骨架的新方法[J]. 自动化学报, 2008, 34(6): 617 – 622.

Several gradient vector field numerical algorithms and their applications in geosciences

YANG Li¹, ZHANG Baoyi^{1,2}

(1. School of Geosciences and Info-Physics, Central South University, Changsha 410083, China;

2. State Key Laboratory of Geological Processes and Mineral Resources, China University of Geosciences, Wuhan 430074, China)

Abstract: Gradient is the most important micro-variation characteristics of scalar field in three-dimensional space, which can reflect its trends better. In this paper, the central-difference operator, adjacent gradient operator and Sobel gradient operator were introduced in detail. In addition, the 3D theoretical gradient vector field of electric potential scalar field produced by a point charge was computed according to its physical formula, and the results calculated by three gradient numerical algorithms was statistically compared with theoretical gradient value to verify their precisions and validities. The experimental results showed that Sobel operator has higher precision in the space excluding the field source than the other two numerical algorithms. At last, the gradient vector field of apparent resistivity surveyed by the controlled source audio-frequency magnetotelluric (CSAMT) method was calculated by Sobel operator to characterize the spatial changes of apparent resistivity, which improves the cognition of the electric property spatial distribution and geological situation in the 3D subsurface space.

Key Words: scalar field; vector field; gradient; apparent resistivity; numerical algorithm