

数学解析法在岩石 三维有限应变测量中的应用

吴乃爵 李福佩

(浙江工学院) (浙江大学)

提 要 本文讨论数学解析法应用于岩石三维有限应变测量的原理,并按实际工作程序,详尽地介绍了工作方法。此法在浙西南龙泉县的查田应变测量计算中取得了较好效果。

关键词 误差界 肖维勒法则 相容 正交试验法 雅可比法

八十年代以来,电脑在我国地质科学中的应用,强有力地推动了地质科学的发展。一方面它使地质科学从各个方面步入“量化”,另一方面它促进了物理学、数学及其它学科与地质科学的渗透。本文介绍了如何用电脑处理岩石的应变测量数据及其原理。

一、问题的提出及其数学模式的建立

为了研究岩石的应变,人们往往通过测量岩石中具有表征其应变特征的褶皱构造、变形化石、鲕粒形态、变形岩脉等等来求算应变椭球体的主轴方位及大小。所以研究岩石的三维应变,其数学实质就是求解应变岩石的椭球方程。已知椭球的空间曲面方程为:

$$D_1X^2 + D_2Y^2 + D_3Z^2 + D_4XY + D_5XZ + D_6YZ = 1$$

将 X、Y、Z 坐标变为实测的 E、N、V 地理坐标,则椭球方程变为:

$$D_1E^2 + D_2N^2 + D_3V^2 + D_4EN + D_5EV + D_6NV = 1$$

若将坐标原点设在椭球心,过椭球心有三个互不平行的平面,将椭球截为三个椭圆面,每个椭圆长短轴的正方向在椭球面上有两个交点,则三个椭圆的长短轴在椭球面上有六个点,若六个皆为野外测量的已知点,就可以得到一组六元联立方程而求出 $D_1 \sim D_6$ 六个系数,从而唯一地确定了欲求解的椭球方程。椭球方程一经确定,其三个应变轴的方位及大小也就被唯一地确定了。

但野外应变测量中,所测量的截面往往并不通过椭球心,所以必须进行以下的数学演绎:

1、已知椭球体的任意截面是个椭圆,沿着该椭圆法线方向上的任一截面,其椭圆的形态是相同的,它们都具有相同的长短轴比率。

2、让所测量的三个椭圆截面沿着截面的法线方向平移至球心。由于测量过程不可避免地存在着误差,我们可利用概率统计与随机过程的数学处理方法(正交试验法),对长短轴的比例($M_i = J_i/K_i$)及侧伏角(ψ)进行适当的调整,使三个截面的测量数据相对于同一椭球能彼此相容,从而得出调整后的三组参数。

所谓相容,即三个椭圆必需是同一椭球过球心的三个截面。若将三个截面沿其相互之间的交线展开至同一平面,如图1。

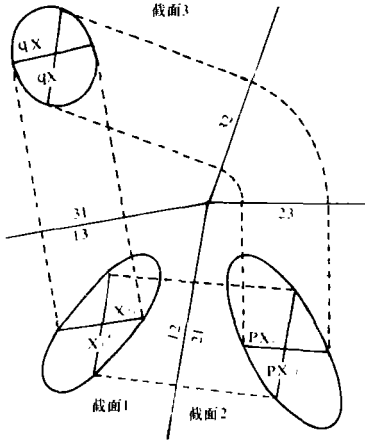


图1 各截面之间的相容条件

Fig. 1 Compatible condition for each section

一截面的椭球层面上。这样调整后,三个截面的边界皆落到同一椭球面上,必然有下列关系:

$$X_{12} = PX_{21}$$

$$X_{13} = qX_{31}$$

$$PX_{23} = qX_{32}$$

这就是所谓使三个椭圆面相对于同一椭球体彼此相容。消去 p, q , 并平方之, 可得到

$$\left(\frac{X_{12}^2}{X_{13}^2}\right) \cdot \left(\frac{X_{23}^2}{X_{21}^2}\right) - \frac{X_{32}^2}{X_{31}^2} = e \quad (e \text{ 应等于零}) \quad (1)$$

上述各量的通式等于:

$$X_{jk}^2 = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{M_j^2}\right) \left\{ \cos[-\psi_j + \tan^{-1} \left(\frac{\sin \theta_j}{\sin(\Phi_k - \Phi_j) \tan \theta_k} - \frac{\cos \theta_j}{\tan(\Phi_k - \Phi_j)} \right) \right\}^2} \quad (2)$$

式中各量可参看图2。

其中:

$M_j = J_j/K_j$, 为长短轴的比率

$\psi_j = 90^\circ -$ 椭圆长轴的侧伏角

θ_j 或 θ_k : 椭圆截面的倾角

Φ_j 或 $\Phi_k = 90^\circ -$ 椭圆截面的倾向

($j = 1, 2, 3; k = 1, 2, 3$)

鉴于测量不可避免地存在着误差, 所以 $e \neq 0$ 。从求算 X_{jk}^2 的公式可看出, 其中 M_j 与 ψ_j 对误

差的贡献最大,所以必须对 M_j 及 ψ_j 进行调整,使 $e \rightarrow 0$,而确定出 X_k 的大小,进而求出 p, q ,最后得到符合相容条件的三组 $J_j, K_j, M_j (j=1, 2, 3)$ 。它们分别是三个截面的长短轴及轴长比率)、 $\varphi_j, \theta_j, \psi_j$ 。至此,对野外测量数据的调整方告完成。

3、调整测量数据,使之彼此相容——求解 $e \rightarrow 0$ 时的 X_k :

由于 $X_k^2 = f(M_j, \psi_j, \Phi_k, \Phi_j, \theta_k, \theta_j)$, 从公式(2)可见它是个超越方程。欲求 $e \rightarrow 0$ 时的 X_k^2 , 显然没有唯一解。为了使计算简化,在六个变量中我们仅调整其中的关键量 M_j 及 ψ_j , 并通过正交试验法求量佳的 M_j 及 ψ_j 。让 $M_j = M_j \pm \Delta M_j; \psi_j = \psi_j \pm \Delta \psi_j$, 即在 $M_j - \Delta M_j \sim M_j + \Delta M_j$ 及 $\psi_j - \Delta \psi_j \sim \psi_j + \Delta \psi_j$ 区间各取七个试验点,于是列出49次正交计算表(表2)。

通过这49组数据的正交运算,可求出49组中 e 值最小的那一最佳组合来。但正交运算中的 M_j 及 ψ_j 的区间如何确定呢?

4、 M_j 及 ψ_j 误差界(ΔM_j 与 $\Delta \psi_j$)的求算:

$M_j = J_j/K_j$, 在野外测量时,对相同倾向、相同侧伏角的椭圆截面应尽量多地测出它们的 M_j 。

1)若测量次数为 n , 则 M_j 的数学期望值

$$\bar{M}_j = \sum_{j=1}^n M_j / n$$

2)求算它的标准误差

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (\bar{M}_j - M_j)^2}{n-1}}$$

3)依肖维勒法则剔除测量值中的粗差:若 $|M_j - \bar{M}_j| > \omega_n \sigma$, 则该测量值应予剔除。其中 ω_n 的取值依测量次数 n 而定,其关系如表1:

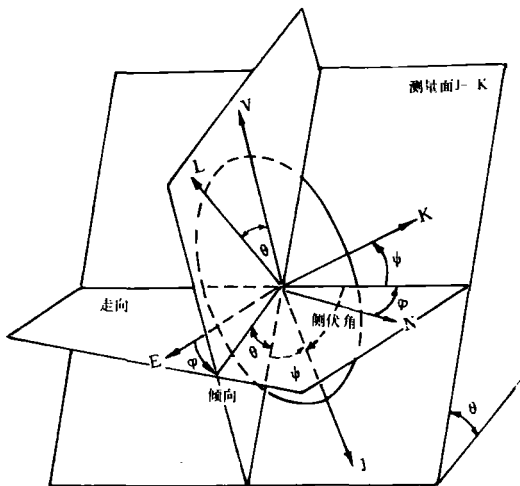


图2 不同坐标系之间的关系

Fig. 2 Relation of different coordinates

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	20	25	30	40	50	100
ω_n	1.38	1.53	1.65	1.73	1.80	1.86	1.92	1.96	2.00	2.03	2.07	2.10	2.13	2.24	2.33	2.39	2.49	2.58	2.81

表2 正交试验计算表

Table 2 Orthogonal calculation

试验号	M ₁	M ₂	M ₃	ψ ₁	ψ ₂	ψ ₃	试验号	M ₁	M ₂	M ₃	ψ ₁	ψ ₂	ψ ₃	试验号	M ₁	M ₂	M ₃	ψ ₁	ψ ₂	ψ ₃
1	1	1	4	6	2	5	18	4	3	7	3	5	7	35	7	5	3	2	3	6
2	2	1	7	1	3	1	19	5	3	3	6	1	3	36	1	6	3	7	4	1
3	3	1	3	4	7	7	20	6	3	6	1	4	6	37	2	6	6	2	2	7
4	4	1	6	5	6	3	21	7	3	1	4	2	2	38	3	6	1	3	3	3
5	5	1	1	7	5	6	22	1	4	1	1	1	7	39	4	6	2	6	7	6
6	6	1	2	2	1	2	23	2	4	2	4	4	3	40	5	6	5	1	6	2
7	7	1	5	3	4	4	24	3	4	5	5	2	6	41	6	6	4	4	5	4
8	1	2	5	2	5	3	25	4	4	4	7	3	2	42	7	6	7	5	1	5
9	2	2	4	3	1	6	26	5	4	7	2	7	4	43	1	7	7	4	6	6
10	3	2	7	6	4	2	27	6	4	3	3	6	5	44	2	7	3	5	5	2
11	4	2	3	1	2	4	28	7	4	6	6	5	1	45	3	7	6	7	1	4
12	5	2	6	4	3	5	29	1	5	6	3	7	2	46	4	7	1	2	4	5
13	6	2	1	5	7	1	30	2	5	1	6	6	4	47	5	7	2	3	2	1
14	7	2	2	7	6	7	31	3	5	2	1	5	5	48	6	7	5	6	3	7
15	1	3	2	5	3	4	32	4	5	5	4	1	1	49	7	7	4	1	7	3
16	2	3	5	7	7	5	33	5	5	4	5	4	7							
17	3	3	4	2	6	1	34	6	5	7	7	2	3							

4)以 3σ 作为它的极限误差(又称误差界),则分别求出了 $3\sigma_{M_i}$ 与 $3\sigma_{\psi_j}$ 的误差界。则 M_i 及 ψ_j 正交试验的区间:

$$\Delta M_i = 3\sigma_{M_i}$$

$$\Delta \psi_j = 3\sigma_{\psi_j}$$

5、为使 e 值进一步收敛,再以0.618法缩小搜索范围,进一步求 M_i 与 ψ_j 的最佳组合:

第一次正交试验在 $M_i \pm \Delta M_i$ 及 $\psi_j \pm \Delta \psi_j$ 区间进行,所求出的 e 值若未收敛到预先期望的微小值(如 5×10^{-3}),则可用第一次正交运算得到的最佳组合 M_i' 和 ψ_j' 为基础,以0.618优选法进行再一次正交试验,即以 $M_i' \pm (0.618)\Delta M_i$ 与 $\psi_j' \pm (0.618)\Delta \psi_j$ 为第二次正交试验的区间。总之,皆以前一次的最佳组合为基础,并让区间缩小0.618倍。如此一次次地正交试验与优选法交替使用下去,一般经过三个轮回,即可使 e 值收敛到较满意的结果。

6、求 p, q 及其误差:

依最佳组合求算其 X_{ik}^2 ,从而得到:

$$P = X_{12}/X_{21}; q = X_{13}/X_{31}$$

其相对误差为:

$$|P(X_{23}) - q(X_{32})| / [|P(X_{23})| + |q(X_{32})|] / 2$$

7、求调整后的 $J_1, K_1, M_1, \Phi_1, \theta_1, \psi_1$, 并将其变换为 E、N、V 自然坐标:

处理后的三组数据为:

$$J_1 = M'_1, K_1 = 1, M'_1, \Phi_1, \theta_1, \psi'_1$$

$$J_2 = M'_2 * P, K_2 = P, M'_2, \Phi_2, \theta_2, \psi'_2$$

$$J_3 = M'_3 * q, K_3 = q, M'_3, \Phi_3, \theta_3, \psi'_3$$

鉴于对每个截面的测量皆以该截面的椭圆中心建立 J、K、V 相对坐标系, 故必须将它们皆统一到 E、N、V 地理坐标系中来。坐标系的关系见表3, 可依立体几何的关系导出, 并依表3进行坐标变换。

表3 坐标系关系变换表

Table 3 Relation of Coordinate transformation

	E	N	V
J	Cej	Cnj	Cvj
K	CeK	CnK	CvK
L	CeL	CnL	CvL

C: 两坐标轴之间夹角的方向余弦

$$Cej = \cos\theta \cdot \cos\Phi \cdot \cos\psi - \sin\Phi \cdot \sin\psi$$

$$Cnj = \cos\theta \cdot \sin\Phi \cdot \cos\psi + \cos\Phi \cdot \sin\psi$$

$$Cvj = -\sin\theta \cdot \sin\psi$$

$$Cek = -\cos\theta \cdot \cos\Phi \cdot \sin\psi - \sin\Phi \cdot \cos\psi$$

$$Cnk = -\cos\theta \cdot \sin\Phi \cdot \sin\psi + \cos\Phi \cdot \cos\psi$$

$$Cvk = \sin\theta \cdot \sin\psi$$

$$Cel = \sin\theta \cdot \cos\Phi$$

$$Cnl = \sin\theta \cdot \sin\Phi$$

$$Cvl = \cos\theta$$

(坐标变换计算如: $E = JCe_j + KCek + LCel$, 余类推。)

8、求应变椭球面方程:

经坐标转换后, 长短轴的端点必然落在椭球面上, 三个截面的长短轴正方向就有六个点在椭球面上。这六个点分别为:

$$E_{J1}, N_{J1}, V_{J1}$$

$$E_{K1}, N_{K1}, V_{K1}$$

$$\begin{aligned} &E_{J2}, N_{J2}, V_{J2} \\ &E_{K2}, N_{K2}, V_{K2} \\ &E_{J3}, N_{J3}, V_{J3} \\ &E_{K3}, N_{K3}, V_{K3} \end{aligned}$$

它们皆满足椭球面方程：

$$D_1E^2 + D_2N^2 + D_3V^2 + D_4EN + D_5EV + D_6NV = 1 \tag{3}$$

以上六个点可建立六个方程，则可依高斯消去法解出 $D_1—D_6$ 六个未知数，从而唯一地求出应变椭球方程。

9、求应变椭球体的三主轴方向及大小：

鉴于公式(3)并非标准的椭球方程，欲求解此非标准形式的椭球方程的三个主轴的大小及方位，从数学上来说有许多途径。笔者在对比了诸多方法后认为采用雅可比求特征向量的方法最为简便，可以同时求出三主轴的大小及它们与各坐标轴的方向余弦，从而可进一步确定各主轴的倾角及空间方位。

二、程序设计框图

上述计算方法如下列框图(图3)所示，采用 Basic 语言编程序在计算机实现。并以浙西南龙泉县的查田应变测量的实际数据作检验。现将按不同的输入方式得出的6种解的主要计算结果列于表4。

表4 龙泉县查田应变测量计算结果
Table 4 Calculation of strain meassurements at Chatian, Longquanxian

计算量 输入方式	主轴倾角			主轴方位角			岩体压缩量 (%)
	A	B	C	A	B	C	
1	33. 87°	—8. 49°	20. 23°	310. 8°	239. 8°	333. 6°	94. 32
2	33. 32°	-11. 36°	22. 08°	6. 1°	254. 1°	338. 1°	96. 72
3	—18. 27°	33. 06°	19. 45°	233. 6°	285. 1°	332. 3°	96. 33
4	—18. 55°	32. 91°	20. 01°	233. 7°	286. 0°	333. 0°	95. 47
5	—1. 88°	33. 87°	21. 31°	245. 6°	331. 5°	336. 4°	90. 65
6	—17. 59°	33. 14°	19. 6°	234. 3°	287. 2°	332. 7°	96. 2

取上表六组主压应变方位的数学期望值为270. 6°，而实地测量该区片理的倾向为270°，可以说宏观与微观测量计算结果是十分一致的。

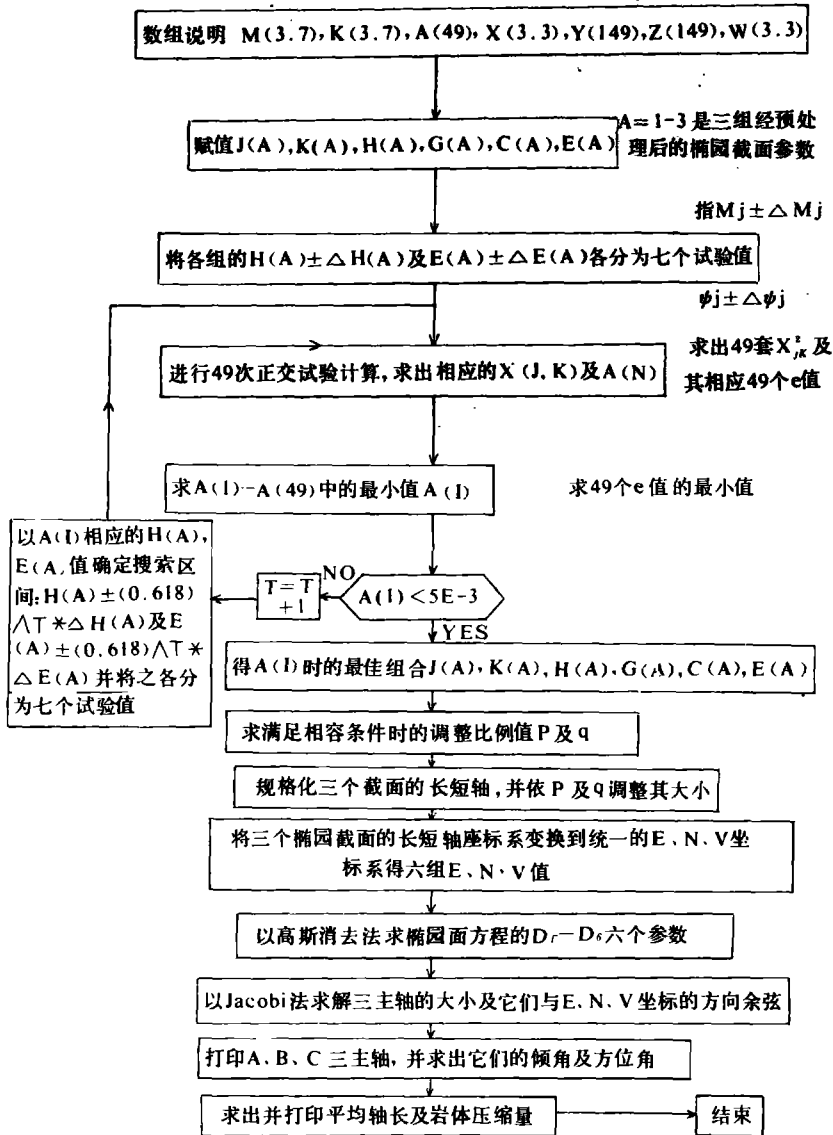


图3 程序设计框图

Fig. 3 Frame diagram of program

三、结束语

本文讨论的数学解析法在岩石三维应变测量中的应用并在浙西南的地质调查及科研工作中得以检验, 并取得了令人满意的结果。但需说明一点, 从公式(2)可知, X_{jk}^* 是一组超越方程。故欲求 $e \rightarrow 0$ 时的 X_{jk}^* 不可能有唯一解, 这就使得进一步求算三主轴的大小及方位也出现了多

解。因此若将经过统计预处理后的数据输入电脑时,只要改变输入的顺序(令三组编号为1,2,3,若改变为1,3,2输入),其结果即有差异。但三组参数仅有六种不同的输入方式而得出六种结果。这六种结果必然形成某一变化区间,解释时可根据宏观及微观的地质资料加以判别而选择出其中的最佳解。但将计算结果求算上述六组数据的数学期望值,是另一种可资选择的方法。上述的浙西南龙泉县的查田应变测量计算结果采用此法就取得了较好的效果。

参考文献

- [1]郑亚东、常志忠,岩石的有限应变测量与韧性剪切带,地质出版社,1985
- [2]宋鸿林,应变测量及其地质意义,地质与勘探,(1)1981
- [3]何绍勋,变形岩石的应变分析,地质与勘探,(2)1982
- [4]邵济安、王存诚,有限应变的一种算法,地质科技通报,(11)1983
- [5]A. R. Gourlay, G. A. Watson et al, 1973, Computational Methods for Matrix Eigenproblems

THREE-DIMENSIONAL FINITE STRAIN MEASUREMENT OF ROCKS USING MATHEMATICS ANALYTIC METHOD

Wu Naijue *Li Fupei*

(Zhejiang Institute of Technology) (Zhejiang University)

Abstract

This paper relates the principle and particular method of three dimensional finite strain measurement of rocks by using mathematics analytic method.

According to the procedure of practical work, the paper presents the method thoroughly on the basis of elaborating the principle.

1、Pretreat the data measured from the field including the determination of error boundary and Chauvenet criterion of rejecting the huge error.

2、In the process of adjusting ellipse parameter and making it to tolerate each other, the authors take the orthogonal test method and 0.618 optimum method alternately to raise the confidence of the data.

3、To avoid the complication of algebra operation method and solid geometry method, Jacobi method was used in evaluating the three main axes and their directions of the strain ellipse.